TIC

PROBABILIDAD

LECCIÓN 2

La estadística trata con la presentación e interpretación de resultados fortuitos que ocurren en un estudio planeado. Por ejemplo, para determinar si una calle necesita un semáforo, se puede estudiar la cantidad de accidentes en una intersección vial en determinado tiempo (un mes, un año). También se puede determinar cuantos artículos producidos en una fábrica salen defectuosos. Esto es posible gracias a la recolección de datos de interés como en los dos ejemplos citados. A estos datos también se les llama mediciones u observaciones. Una observación puede contener valores numéricos o categóricos. Por ejemplo, si se observaron tres colisiones en la intersección vial estudiada, el número tres representa el conjunto de observaciones. Al proceso de realizar mediciones de un evento o un suceso se le denomina un experimento. Un ejemplo de un experimento puede ser lanzar una moneda al aire. Sabemos que solo hay dos resultados posibles (cara o cruz). En estadística interesan las observaciones que se obtienen al repetir varias veces un experimento, ya que se pueden determinar y modelar los múltiples experimentos. No obstante, el conocer el modelo de un evento no necesariamente permite saber qué va a pasar como resultado del siguiente experimento. Es decir, si hemos lanzado 100 veces una moneda al aire y analizado estos datos, no podremos decir con total certeza qué valor resultará del experimento 101 ya que hay factores que afectan el comportamiento de la variable medida. A estos factores se les conoce como incertidumbre y siempre existirá incertidumbre asociada a los experimentos. Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estadístico se llama espacio muestral y se suele representar en la literatura con la letra S.

PROBABILIDAD

LECCIÓN 2

A cada resultado en un espacio muestral se le llama punto muestral. Si el espacio muestral tiene un número finito de elementos se pueden escribir como una lista. Por ejemplo, los resultados posibles de lanzar una moneda al aire se pueden escribir como:

$$S = \{H, T\}$$

En donde H representaría las veces que la moneda cayó cara y T las veces que la moneda cayó cruz.

Teniendo en cuenta un espacio muestral con un conjunto finito de elementos, la probabilidad de la ocurrencia de un evento que resulta de tal experimento estádístico se evalua utilizando un conjunto de números reales denominados probabilidades, que van de cero a uno. Para todo punto en el espacio muestral se debe asignar una probabilidad de tal forma que, al sumar todas las probabilidades, siempre sean iguales a uno. Entre mayor sea el valor asignado a una muestra, se considera que mayor es la probabilidad de que ocurra.

En muchos experimentos, como es el caso de lanzar una moneda o un dado, se suelen considerar como objetos “justos”. Es decir, que todos los eventos posibles tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Por lo tanto, se les asignan probabilidades iguales. A todos los puntos por fuera del espacio muestral se les asigna un cero, es decir, no pueden ocurrir en el experimento. Por ejemplo, no podría ocurrir que al tirar un único dado se obtenga como resultado el número 7, por lo tanto, se le asigna al 7 la probabilidad de cero.

TIC

PROBABILIDAD
LECCIÓN 2

Para encontrar la probabilidad de un evento A, sumamos todas las probabilidades que se asignan a los puntos muestrales en A. Esta suma se denomina probabilidad de A y se denota como P(A).

Ejemplo, una moneda se lanza dos veces: ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos una cara (evento H)? Si el espacio muestral del experimento es:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

Si la moneda está balanceada, cada uno de los resultados tendrá las mismas probabilidades de ocurrir. Por lo tanto, asignamos una probabilidad a cada uno de los puntos muestrales. Como tenemos 4 eventos, cuya probabilidad es igual, y en conjunto suman 1, se puede escribir como:

$$4\omega=1$$

Es decir, cada evento tiene un cuarto de probabilidad de ocurrir.

Si A representa el evento de que ocurra al menos una cara H entonces:

A = {HH, Ht, TH} y podemos describir la probabilidad de A:

PA= 14+14+14=34

Así las cosas, la probabilidad de que ocurra al menos una cara es de tres cuartos.

TIC

Conteo de puntos muestrales

Uno de los problemas a considerar es tratar de evaluar la aleatoriedad asociada a la ocurrencia de ciertos eventos cuando se realiza un experimento. En muchos casos un problema de probabilidad se puede resolver mediante el conteo del número de puntos en el espacio muestral, sin listar realmente cada uno de los elementos. A esto se le conoce como la regla de la multiplicación: “Si una operación se puede llevar a cabo en n1 formas y si para cada una de éstas se puede realizar una segunda operación en n2 formas, entonces las operaciones se pueden ejecutar juntas en n1xn2 formas.

Por ejemplo: para responder ¿Cuántos puntos muestrales hay en el espacio muestral cuando se lanza un par de dados una vez? Se debe considerar que el primer dado puede caer en cualquiera de n1=6 maneras. Para cada una de esas 6 maneras, el segundo dado puede caer n2=6 formas. Por lo tanto el par de dados puede caer n1xn2=36 formas posibles.

Como segundo ejemplo, suponga que un cliente quiere comprar un nuevo teléfono que puede tener una de 5 marcas posibles, una de cinco capacidades disponibles y uno de cuatro colores diferentes. La cantidad de alternativas para escoger teléfono es: n1xn2xn3 = 5x5x4 = 100.

TIC

Permutaciones

Una permutación es un arreglo de todo o parte de un conjunto de objetos. Por ejemplo, se quiere saber cuántas permutaciones son posibles entre las letras a, b y c. Una forma de hacerlo es listar las posibilidades, que serían abc, acb, bac, bca, cab y cba. Por lo tanto vemos que hay 6 arreglos. Si el arreglo es más extenso listar las combinaciones deja de ser una opción viable. Para calcular la cantidad de probabilidades sin listar los arreglos posibles se puede seguir la siguiente regla: Si una operación se puede ejecutar en n1 formas, y si para cada una de éstas se puede llevar a cabo una segunda operación en n2 formas, y para cada una de las primeras dos se puede realizar una tercera operación en n3 formas, y así sucesivamente, entonces la serie de k operaciones se puede realizar en n1xn2x...xnk formas.

Aplicando la regla tenemos que ha1 n1=3 opciones para acomodar la primera posición, y que también hay n2=2 opciones para la segunda posición e independientemente de cual de las dos letras se elija para las primeras dos posiciones solo hay n3=1 elección para la última posición.
Lo que deja un total de:

n1xn2nx3= 3x2x1 = 6 permutaciones.
En general, para n objetos distintos la regla se puede escribir como:
nn-1n-2321
De forma simple, empleando la notación factorial se puede reescribir como:
N!=nn-1.. (2)(1)

Con lo cual llegamos al siguiente teorema:

El número de permutaciones de n objetos es n!

Por ejemplo, el número de permutaciones de las cuatro letras a, b, c y d será 4!=24. Sin embargo, si necesitamos calcular las permutaciones posibles de un subconjunto, como es el caso de responder ¿Cuántas permutaciones de
dos letras se pueden obtener de las letras a, b, c, d? En este caso tenemos dos posiciones para llenar con 4 opciones para la primera y tenemos 3 opciones para llenar con la segunda, siendo calculado como:

$n1n2=43=12$

En general, con n objetos distintos tomados de r a la vez, se pueden agregar en:

$nn-1n-2...(n-r+1)$

El número de permutaciones de n objetos distintos tomados de r a la vez es:
$nPr= n!n-r!$