TIC

Tipos especiales de matrices y vectores, y operacionesentre elementos

TALENTO TECH
UTP Universidad Tecnológica de Pereira
faceIT

Tipos especiales de matrices y vectores

Matrices diagonales

Una matriz diagonal es aquella en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero. La diagonal principal contiene los elementos principales de la matriz. Una matriz diagonal se denota como D=diag(d1,d2,...,dn),donde d1,d2,...,dn son los elementos de la diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrices simétricas

Una matriz simétrica es igual a su traspuesta. Formalmente, para una matriz A de orden n×n, es simétrica si AT=A. Las matrices simétricas tienen propiedades especiales y son comunes en diversas aplicaciones.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Vectores Unitarios

Un vector unitario es un vector que tiene longitud 1 (norma euclidiana igual a 1). Puede ser denotado como u y cumple con ∥u∥=1. En álgebra lineal, a menudo se utiliza en contextos como la normalización de vectores.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Matrices Ortogonales

Una matriz ortogonal es una matriz cuadrada en la que las filas y columnas son vectores unitarios y son mutuamente ortogonales. La propiedad fundamental de una matriz ortogonal Q es que QT⋅Q=Q⋅QT=I, donde I es la matriz identidad. La multiplicación por una matriz ortogonal no cambia la longitud de un vector.

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Estos tipos de matrices tienen aplicaciones importantes en diversas áreas, como transformaciones lineales, sistemas de ecuaciones, y en algoritmos y métodos numéricos.

Operaciones entre elementos

Conozcamos las operaciones entre elementos y cómo se desarrollan:

Suma

La suma de matrices es una operación fundamental en álgebra lineal que se realiza elemento por elemento entre matrices del mismo tamaño. Dadas dos matrices A y B del mismo tamaño m×nm×n, la suma C=A+B se define como otra matriz m×n donde cada elemento cij de C es la suma de los elementos correspondientes de A y B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

En términos más generales, si A=[aij] y B=[bij], entonces la matriz suma C=A+BC=A+B se expresa como:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Es importante destacar que para que la suma sea posible, las matrices deben tener el mismo número de filas y columnas. La suma de matrices es conmutativa, asociativa y tiene un elemento neutro (la matriz cero). Además, las propiedades distributivas también se aplican, es decir, A+(B+C)= (A+B)+C.

Resta

La resta de matrices es una operación que se realiza elemento por elemento entre matrices del mismo tamaño. Dadas dos matrices A y B del mismo tamaño m×n, la resta C=A−B se define como otra matriz m×nm×n donde cada elemento cij de C es la resta de los elementos correspondientes de A y B:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

En términos más generales, si A=[aij] y B=[bij], entonces la matriz resta C=A−BC=A−B se expresa como:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

Al igual que con la suma de matrices, la resta de matrices requiere que ambas matrices tengan el mismo número de filas y columnas. La resta también es conmutativa y asociativa, y cumple con las propiedades distributivas.

Multiplicación de matrices y vectores

La multiplicación de matrices es una operación fundamental en álgebra lineal. Dada una matriz A de tamaño m×n y una matriz B de tamaño n×p, el producto C=A⋅B es una matriz m×p. El elemento en la posición i,j de la matriz resultante C se obtiene multiplicando los elementos de la fila i de A por los elementos de la columna j de B y sumándolos:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

En términos más generales, si A=[aij] y B=[bij], entonces la matriz producto C=A⋅B se expresa como:

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{kp} \end{bmatrix}$$

Es importante destacar que para que la multiplicación sea posible, el número de columnas de la matriz A debe ser igual al número de filas de la matriz B. El resultado de la multiplicación es una nueva matriz cuyo tamaño está determinado por el número de filas de A y el número de columnas de B.ç Además, la multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir, en general, A · B no es lo mismo que B · A.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot B \neq B \cdot A$$

Producto de Matriz con vector

El producto de una matriz por un vector es una operación común en álgebra lineal. Dada una matriz A de tamaño m×n y un vector columna v de tamaño n×1, el resultado del producto Av es un nuevo vector columna u de tamaño m×1.

Para calcular AvAv, se multiplica cada fila de la matriz AA por el elemento correspondiente en el vector vv y se suman los resultados.

Matemáticamente, si

$$A = [a_{ij}] \text{ y } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

entonces el resultado u=Av se obtiene como:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot v_j$$

Esto puede expresarse también de forma más compacta utilizando la notación de sumatoria:

$$u = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot v_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot v_j \end{bmatrix}$$

En términos prácticos, este producto de matriz por vector es fundamental en numerosas aplicaciones, como transformaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y en el contexto de redes neuronales, donde las entradas se representan como vectores y las transformaciones como matrices.